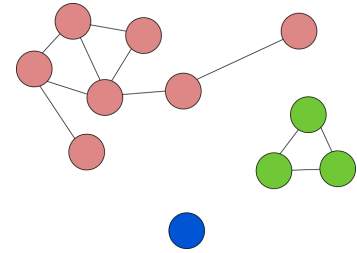


8. ЗООПАРК ТЕОРИИ ГРАФОВ

Словарик

Связный граф. Граф называется *связным*, если из каждой его вершины в каждую из остальных существует путь по рёбрам.

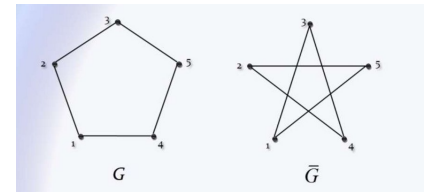
Компоненты связности. Если граф не является связным, то он состоит из нескольких *компонент связности*, каждая из которых является связным графом, и которые не связаны между собой.



Граф с 3 компонентами связности

Полный граф. Граф называется *полным*, если любые две различные его вершины соединены ребром. Полный граф с n вершинами обозначается K_n . Например, K_3 — это треугольник, K_4 — тетраэдр.

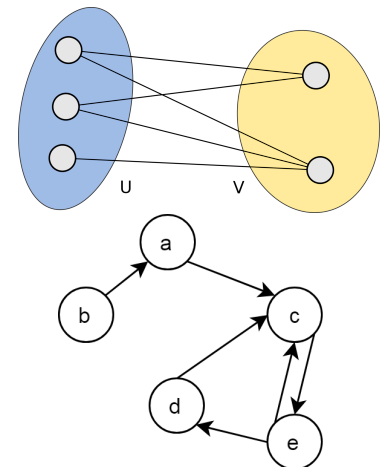
Дополнение к графу. Для графа G с множеством вершин V *дополнением к этому графу*) называется граф $\bar{G}$ с тем же множеством вершин, в котором вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда они *не* соединены ребром в G .



Пятиугольник и его дополнение

Двудольный граф. Граф называется *двудольным* с долями U и V , если множество его вершин — это объединение $U \cup V$, доли U и V не пересекаются ($U \cap V = \emptyset$), и каждое ребро соединяет вершину из U с вершиной из V .

Ориентированный граф, или орграф, — это набор вершин, некоторые пары которых соединены *стрелками* — направленными рёбрами. Каждые две вершины могут быть или не соединены совсем, или соединены одним ребром со стрелкой в одном направлении, или соединены двумя рёбрами — со стрелками в противоположных направлениях.



Двудольный граф и орграф

0° Найдите в этом листке по одной задаче, в которых фигурируют графы:

- ☐ а) связный, ☐ б) полный,
☐ в) двудольный, ☐ г) ориентированный, ☐ д) дополнение к графу.

Эту задачу рекомендуется сдавать уже после того, как решены обязательные задачи листка.

Среди задач 1–7 пятую задачу нужно **сдать обязательно, причём письменно**. Остальные задачи можно выбрать: либо решить все задачи с 1 по 4, либо 6 и 7. Разумеется, можно решить и все задачи, если хотите.

☐ **1°** Дима, приехав из Врунляндии, рассказал, что там есть несколько озёр, соединённых между собой реками. Из каждого озера вытекают три реки, и в каждое озеро впадают четыре реки. Докажите, что он ошибается.

☐ **2°** В классе каждая девочка дружит с пятью девочками и восемью мальчиками, а каждая зелёная — с девятью девочками и шестью мальчиками. Кого в классе больше — мальчиков или девочек?

☐ **3°** Даня соединил проводами несколько компьютеров. Каждый провод соединяет два компьютера. От одного компьютера отходит 4 провода, от трёх компьютеров по 3 провода, от четырёх — по 2 провода и от последнего — ещё 1. Сколько всего проводов протянул Даня?

☐ **4°** Можно ли провести 179 линий так, чтобы каждая пересекалась с 5, 7 или 57 другими?

☐ **5° Лемма о рукопожатиях.** В любом графе число вершин нечётной степени чётно.

6 В школе учится 300 учеников. В среднем каждый из них дружит ровно с тремя другими учениками школы. При этом каждая девочка дружит хотя бы с тремя мальчиками, а каждый мальчик — хотя бы с одним мальчиком. Какое наибольшее количество девочек может учиться в школе?

7 В классе 20 учеников, каждый из которых дружит ровно с шестью одноклассниками. Найдите число компаний из трёх учеников, где либо все дружат, либо никто не дружит друг с другом.

8° В стране расположены 12 городов. Два города соединены дорогой, если разность их номеров делится на 3.

а) Нарисуйте карту города.

б) Можно ли в этой стране добраться от любого города до любого другого? Если нет, то сколько у карты компонент связности?

в) Найдите число треугольников (троек попарно соединённых городов) в этой стране.

9° В некотором государстве каждый город соединён с каждым дорогой. Сумасшедший король хочет ввести на дорогах одностороннее движение так, чтобы выехав из любого города, в него нельзя было вернуться. Всегда ли он сможет так сделать?

10° В Средиземье ввели грифоновые перелёты. Из Минас-Тирита стартует 21 путь, из Шира — один, а из других городов — по 20. Докажите, что из Минас-Тирита можно долететь до Шира. Пути между городами двусторонние.

11° Наташа положила на стол 11 пуговиц и каждую связала ниткой хотя бы с пятью другими. Если поднять одну пуговицу, потянутся ли за ней все остальные?

12 Докажите, что:

а)° среди 6 человек найдутся три попарно знакомых или три попарно не знакомых;

б) среди 10 человек найдутся три попарно знакомых или четыре попарно не знакомых;

в) среди 9 человек найдутся три попарно знакомых или четыре попарно не знакомых.

13° Любые два города страны соединены либо железной дорогой, либо авиалинией. Докажите, что можно выбрать один из видов транспорта так, чтобы из любого города в любой другой можно было добраться, пользуясь только им (возможно, с пересадками).

14 В секретной службе работают n агентов — 001, 002, ..., 007, ..., n . Первый агент следит за агентом, который следит за вторым, второй — за тем, кто следит за третьим, и т.д., n -й — за тем, кто следит за первым. Докажите, что n — нечётное число.

15 В клубе прошёл турнир по шахматам на троих. Каждый день несколько троек играло в шахматы. Могло ли так получиться, что каждые два игрока встретились за одной доской ровно по одному разу, если в турнире участвовало

а) 8 игроков, **б)** 9 игроков, **в)** 11 игроков?

Какое минимальное число дней они играли, если каждый игрок за день сыграл не больше одной партии?

16 Даша пригласила на день рождения 20 своих знакомых. Оказалось, что в каком бы порядке гости ни приходили на праздник, каждый новый пришедший будет знать не менее половины уже присутствующих (включая Дашу). Докажите, что среди гостей найдется 10 попарно знакомых.

17 В классе учатся несколько человек. Могло ли так оказаться, что у каждого из них ровно 10 друзей, а у каждой пары человек ровно 4 общих друга?

18* В компании из 10 человек некоторые пары людей поссорились, всего произошло 15 ссор. Докажите, что можно выбрать трёх человек, которые не ссорились друг с другом.

19* Каких графов на n нумерованных вершинах больше: связных или несвязных?

20* **а)** Докажите, что в графе с $2n$ вершинами, в котором нет трех попарно соединённых вершин, не больше n^2 рёбер. Приведите пример, когда оценка достигается.

б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для графа с $2n + 1$ вершиной.

в)** Чему равно наибольшее число рёбер в графе с n вершинами, в котором не существует k попарно соединённых вершин?